

I قانون تركيب داخلي *Loi de composition externe*

1. تعريف :

لتكن E و K مجموعتين غير فارغتين .

كل تطبيق من $K \times E$ نحو E يسمى قانون تركيب خارجي معرف في E معاملاته في K نرمز لـ $f : K \times E \rightarrow E$ $(\alpha, x) \mapsto f((\alpha, x))$.
 $f((\alpha, x))$ ب $\alpha.x$ أو باختصار αx (مع العلم αx من E حيث α من K و x من E) .

2. ملحوظة :

• كل قانون تركيب داخلي هو قانون تركيب خارجي .

• العكسي غير صحيح دائما (مثال $f : \mathbb{R} \times V_2 \rightarrow V_2$ مع V_2 مجموعة متجهات المستوى) .
 $(\alpha, \vec{v}) \mapsto f((\alpha, \vec{v})) = \alpha \cdot \vec{v}$

3. كتابة $\alpha.x$ لبعض الحالات :

• $E = \mathbb{R}$ و $K = \mathbb{R}$ أي (α, x) من $K \times E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ نكتب $\alpha.x = \alpha \times x$.

• $E = \mathbb{C}$ و $K = \mathbb{R}$ أي $(\alpha, x) = (\alpha, z)$ من $K \times E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ مع $x = z = a + ib$ (حيث a و b من \mathbb{R}) نكتب :

$$\alpha.x = \alpha \times z = \alpha.(a + ib) = \alpha a + i\alpha b$$

• $E = \mathbb{R}^2$ و $K = \mathbb{R}$ أي $(\alpha, x) = (\alpha, (a, b))$ من $K \times E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ (و ليس $K \times E = \mathbb{R}^3$) نكتب :

$$\alpha.x = \alpha.(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

بصفة عامة : $(n \in \mathbb{N}^*)$

• $E = \mathbb{R}^n$ و $K = \mathbb{R}$ أي $(\alpha, x) = (\alpha, (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n))$ من $K \times E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (و ليس $K \times E = \mathbb{R}^{n+1}$) نكتب :

$$\alpha.x = \alpha.(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots, \alpha a_n)$$

• $E = M_2(\mathbb{R})$ و $K = \mathbb{R}$ أي $(\alpha, x) = \left(\alpha, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right)$ من $K \times E = \mathbb{R} \times M_2(\mathbb{R})$ نكتب :

$$\alpha.x = \alpha \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix}$$

• $E = M_3(\mathbb{R})$ و $K = \mathbb{R}$ أي $(\alpha, x) = \left(\alpha, \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \right)$ من $K \times E = \mathbb{R} \times M_3(\mathbb{R})$ نكتب :

$$\alpha.x = \alpha \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a' & \alpha a'' \\ \alpha b & \alpha b' & \alpha b'' \\ \alpha c & \alpha c' & \alpha c'' \end{pmatrix}$$

• $E = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ و $K = \mathbb{Z}$ أي $(\alpha, x) = (\alpha, \bar{a})$ من $K \times E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ نكتب : $\alpha.x = \alpha \times \bar{a} = \overline{\alpha a}$



II فضاء متجهي حقيقي : Espace vectoriel réel

I. تعريف :

لتكن E مجموعة ($E \neq \emptyset$) مزود بقانونين أحدهما داخلي $*$ و الآخر خارجي \bullet على جسم تبادلي $(K, +, \times)$ معرف كما يلي :

$$.: K \times E \rightarrow E$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x = \alpha x$$

نقول إن : المجموعة $(E, *, \bullet)$ فضاء متجهي على الجسم التبادلي K وحدته هي u نضع $u = 1$ إذا تحقق ما يلي :

- زمرة تبادلية. $(E, *)$
- القانون التركيب الخارجي يحقق ما يلي : لكل x و y من E ؛ لكل α و β من K لدينا :

$$. 1. \alpha \cdot (x * y) = \alpha \cdot x * \alpha \cdot y$$

$$. 2. (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x * \beta \cdot y$$

$$. 3. \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \times \beta) \cdot x$$

$$. 4. u \cdot x = 1 \cdot x = x$$

2. مفردات :

الشروط الأربع السابقة تسمى موضوعات الفضاء .

❖ عناصر E نسميها متجهات الفضاء $(E, *, \bullet)$ على الجسم التبادلي K و نرسم لها ب : \vec{x} و \vec{y} و \vec{z} و

❖ عناصر الجسم K تسمى معاملات *Les scalaires* .

❖ بدل من أن نقول $(E, *, \bullet)$ فضاء متجهي على الجسم التبادلي K نقول المجموعة E هي K فضاء متجهي

E est K -espace vectoriel أو باختصار E هي K -espace

❖ من خلال هذه الموضوعات الأربع السابقة أسست وتطورت نظرية تسمى الجبر الخطي *L'algèbre linéaire* .

3. ملحوظة :

❖ نعتبر جسم تبادلي $(K, +, \times)$ لدينا $(K, +, \bullet)$ فضاء متجهي على K (مع $\times = \bullet$) . نقول باختصار $(K, +, \bullet)$ فضاء متجهي على

الجسم K .

❖ أمثلة :

$$. \mathbb{R} \quad \checkmark \quad (\mathbb{R}, +, \bullet) = (\mathbb{R}, +, \times) \quad \text{فضاء متجهي على } \mathbb{R}$$

$$. \mathbb{C} \quad \checkmark \quad (\mathbb{C}, +, \bullet) = (\mathbb{C}, +, \times) \quad \text{فضاء متجهي على } \mathbb{C}$$

4. فضاء متجهي حقيقي :

❖ تعريف :

كل فضاء متجهي $(E, +, \bullet) = (E, *, \bullet)$ على الجسم التبادلي $(\mathbb{R}, +, \times)$ يسمى فضاء متجهي حقيقي .

❖ ملحوظة :

حالة $(E, +, \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي لدينا :

• زمرة تبادلية. $(E, +)$

$$\checkmark \text{ التبادلية } \forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

$$\checkmark \text{ التجمعية : } \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E : (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

$$\checkmark \text{ العنصر المحايد للقانون الداخلي } + \text{ في } E \text{ هو } \vec{0} = e \text{ ومنه : } \forall \vec{x} \in E : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$$

$$\checkmark \text{ كل عنصر من } E \text{ له مماثل بالنسبة للقانون الداخلي } + \text{ هو } -\vec{x} \text{ ومنه : } \vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$$

$$\therefore \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

$$\bullet \text{ القانون التركيب الخارجي . هو } (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x = \alpha x$$

الموضوعات الأربعة تكتب على الشكل التالي:

لكل \vec{x} و \vec{y} من E ؛ لكل α و β من \mathbb{R} لدينا :

$$1. \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

$$2. (\alpha + \beta)x = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$$

$$3. \alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$$

$$4. 1\vec{x} = \vec{x}$$

أمثلة : 5.

$$\bullet (\{0\}, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على جميع الأجسام التبادلية } K$$

$$\bullet (\mathbb{R}, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \times) \text{ فضاء متجهي حقيقي .}$$

$$\bullet (\mathbb{C}, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على الجسم التبادلي } \mathbb{R} \text{ إذن هو } (\mathbb{C}, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي حقيقي .}$$

$$\bullet (M_2(\mathbb{R}), +, \cdot) \text{ فضاء متجهي حقيقي .}$$

$$\bullet (M_3(\mathbb{R}), +, \cdot) \text{ فضاء متجهي حقيقي .}$$

$$\bullet (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot) \text{ مجموعة الدوال من } \mathbb{R} \text{ نحو } \mathbb{R} \text{ (حيث } + \text{ هو الجمع المعتاد لدالتين و } \cdot \text{ القانون الخارجي هو } \alpha \cdot f = \alpha f \text{ مع } \alpha \in \mathbb{R}$$

هو فضاء متجهي حقيقي .)

$$\bullet \text{ ليكن } (K, +, \times) \text{ جسم تبادلي و وحدته } u = 1 \text{ (أي العنصر المحايد للقانون } \times \text{ . لنعتبر في المجموعة } K \times K \text{ القانونين التاليين :}$$

$$\forall (a, b), (a', b') \in K^2 : (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\forall (a, b) \in K^2, \forall \alpha \in K : \alpha \cdot (a, b) = (\alpha \times a, \alpha \times b) = (\alpha a, \alpha b)$$

1. القانون الداخلي له بنية زمرة تبادلية (يمكنك أن تثبت بسهولة : التبادلية - التجمعية - العنصر المحايد هو الزوج $(0, 0)$ و كل زوج

$$(a, b) \text{ مماثله } (-a, -b) .$$

2. القانون الخارجي . يحقق موضوعات الفضاء الأربعة :

ليكن (a, b) و (a', b') من $K \times K$ و ليكن α و β من K .

$$\underline{\text{أ.}} \text{ الموضوعات 1 : } \alpha[(a, b) + (a', b')] = \alpha(a + a', b + b')$$

$$= (\alpha a + \alpha a', \alpha b + \alpha b')$$

$$= (\alpha a, \alpha b) + (\alpha a', \alpha b')$$

$$= \alpha(a, b) + \alpha(a', b')$$

$$\text{ب- الموضوع 2 : } (\alpha + \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b)$$

$$= (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$$

$$= (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = \alpha(a, b) + \beta(a, b)$$

ج- الموضوع 3 :

$$\alpha[\beta(a, b)] = \alpha(\beta a, \beta b)$$

$$= (\alpha\beta a, \alpha\beta b)$$

$$= \alpha\beta(a, b)$$

د- الموضوع 4 :

$$1 \cdot (a, b) = (1a, 1b)$$

$$= (a, b)$$

خلاصة : $(K \times K, +, \cdot)$ فضاء متجهي على $(K, +, \cdot)$.

بصفة عامة : المجموعة $(K^n, +, \cdot)$ (K^n مجموعة العناصر التي على شكل $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ وهي تسمى n -uplets) حيث K^n مزود بالقانونين :

$$\bullet (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n) \text{ (القانون الداخلي في } K^n \text{)}$$

$$\bullet \alpha \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots, \alpha a_n) \text{ (القانون الخارجي معرف على } K^n \text{ معاملات في } K \text{)}$$

نتحقق كما سبق بأن $(K^n, +, \cdot)$ فضاء متجهي على $(K, +, \cdot)$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

6. نتيجة :

$$\bullet (K^n, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على } (K, +, \cdot) \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

كل جسم تبادلي فهو فضاء متجهي على نفسه.

7. أمثلة :

$$\bullet (R^n, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على } (R, +, \cdot) \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet \text{ أي } (R, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على } (R, +, \cdot) \text{ و } (R^2, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على } (R, +, \cdot) \text{ و } \dots \text{ و } \dots$$

$$\bullet (C^n, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على } (C, +, \cdot) \text{ مع } n \in \mathbb{N}^* \text{ . وكذلك } (C^n, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي على } (R, +, \cdot) \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

III. خاصيات في فضاء متجهي حقيقي : *Propriétés dans \mathbb{R} -espace vectoriel* (أو قواعد الحساب في فضاء متجهي حقيقي).

ملحوظة : في الخاصيات التالية نعتبر $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

1. خاصية 1 :

$$\forall \vec{x} \in E : 0\vec{x} = \vec{0}$$

2. برهان :

ليكن \vec{x} من E و α من \mathbb{R} لدينا : $\alpha\vec{x} + \vec{0} = \alpha\vec{x}$ (لأن $(E, +)$ زمرة تبادلية و $\vec{0}$ العنصر المحايد فيها)

$$= (\alpha + 0)\vec{x} \text{ (لأن } \mathbb{R} \text{ جسم تبادلي)}$$



$$(\text{حسب إحدى موضوعات الفضاء}) \quad = \alpha \vec{x} + 0\vec{x}$$

$$\alpha \vec{x} + \vec{0} = \alpha \vec{x} + 0\vec{x}$$

ومنه :

$$(\text{بما أن } (E, +) \text{ زمرة تبادلية إذن كل عنصر من } E \text{ منتظم ل } + \text{ لأن } \alpha \vec{x} \in E) \quad \vec{0} = 0\vec{x}$$

إذن :

$$\vec{0} = 0\vec{x} \quad \text{خلاصة : } \vec{0} = 0\vec{x}$$

3. خاصية 2 :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \vec{0} = \vec{0}$$

4. برهان :

ليكن \vec{x} من E و α من \mathbb{R} لدينا :

$$(\text{لأن } (E, +) \text{ زمرة تبادلية و } \vec{0} \text{ العنصر المحايد فيها}) \quad \alpha \vec{x} + \vec{0} = \alpha \vec{x}$$

$$(\text{لأن } (E, +) \text{ زمرة تبادلية و } \vec{0} \text{ العنصر المحايد فيها}) \quad = \alpha (\vec{x} + \vec{0})$$

(حسب إحدى موضوعات الفضاء)

$$= \alpha \vec{x} + \alpha \vec{0}$$

$$\alpha \vec{x} + \vec{0} = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{0}$$

ومنه :

$$(\text{بما أن } (E, +) \text{ زمرة تبادلية إذن كل عنصر من } E \text{ منتظم ل } + \text{ لأن } \alpha \vec{x} \in E) \quad \vec{0} = \alpha \vec{0}$$

إذن :

$$\vec{0} = \alpha \vec{0} \quad \text{خلاصة : } \vec{0} = \alpha \vec{0}$$

5. خاصية 3 :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} ; \forall \vec{x} \in E : \alpha \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x} = \vec{0} \text{ أو } \alpha = 0)$$

6. برهان :

← الاستلزام العكسي صحيح حسب الخاصيتين السابقتين .

⇒ نبين أن الاستلزام المباشر صحيح .

ليكن \vec{x} من E و α من \mathbb{R} حيث $\alpha \vec{x} = \vec{0}$.إذا كان $\alpha = 0$ الاستلزام المباشر صحيح .نفترض أن $\alpha \neq 0$.بما أن $\alpha \neq 0$ إذن $\alpha \in \mathbb{R}^*$ إذن قابل للمماثلة ومماثله هو $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}^*$.لدينا : $\alpha \vec{x} = \vec{0}$. ومنه :

$$\alpha \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \alpha^{-1} (\alpha \vec{x}) = \alpha^{-1} \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha^{-1} \alpha) \vec{x} = 1 \cdot \vec{0}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

ومنه $\vec{x} = \vec{0}$

و بالتالي : الاستلزام المباشر صحيح .

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} ; \forall \vec{x} \in E : \alpha \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x} = \vec{0} \text{ أو } \alpha = 0)$$

7. خاصية 4 :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} ; \forall \vec{x} \in E : (-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$$

8. برهان :

ليكن \vec{x} من E و α من \mathbb{R} .

• نبين أن : $(-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$

لدينا : $\alpha + (-\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha + (-\alpha))\vec{x} = 0\vec{x}$ (استعمال القانون الخارجي . مع \vec{x})

إذن : $\Rightarrow \alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x} = \vec{0}$ (حسب الخاصية 1 و إحدى موضوعات الفضاء)

ومنه : $\Rightarrow \underbrace{-\alpha\vec{x}}_0 + \alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x} = \underbrace{-\alpha\vec{x}}_{-(\alpha\vec{x})} + \vec{0}$ (نركب في المجموعة $(E, +)$ ب $(-\alpha\vec{x})$)

ومنه : $\Rightarrow (-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$ (مماثل $\alpha\vec{x}$ هو $(-\alpha\vec{x})$ في $(E, +)$)

إذن : $\textcircled{1} (-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$

• نبين أن : $-\alpha\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$

حسب البرهان السابق : $(-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$ و حسب إحدى موضوعات الفضاء نحصل على : $(-1)\vec{x} = -(\vec{x})$

ومنه : $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$ (العلاقة $\textcircled{2}$)

و بالتالي :

$$\textcircled{2} \Rightarrow \alpha[(-1)\vec{x}] = \alpha[-\vec{x}]$$

$$\Rightarrow (\alpha(-1))\vec{x} = \alpha(-\vec{x})$$

$$\Rightarrow (-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x})$$

إذن : $\textcircled{3} (-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x})$

حسب : $\textcircled{1}$ و $\textcircled{3}$ نحصل على : $(-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$ وهذا ما كنا نبحث عنه .

IV. الفضاءات المتجهية الجزئية : Les sous - espaces vectoriels

تعريف :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من E ($E \subset F$) .

نقول إن $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$ إذا تحقق ما يلي :

• $(F, +)$ زمرة جزئية ل $(E, +)$.

• القصور القانون التركيب الخارجي . على المجموعة $\mathbb{R} \times F$ (أي $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x = \alpha x$) بدوره يحقق الموضوعات الفضاء

الأربع .



2. الخاصية المميزة 1:

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير منعدم من E ($F \neq \emptyset$ و $E \subset F$).

$(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$ إذا و فقط إذا كان :

- $\forall (x, y) \in F^2 : x + y \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in F : \alpha x \in F$

3. برهان :

\Rightarrow نبين على صحة الاستلزام المباشر :

لدينا $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$ نبين على صحة الشرطين .

- بما أن $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$ إذن $(F, +)$ زمرة جزئية ل $(E, +)$ إذن $(F, +)$ مستقرة إذن :

$$\forall (x, y) \in F^2 : x + y \in F$$

- الشرط الثاني متحقق لأنه قصور القانون الخارجي . ومنه $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in F : \alpha x \in F$ وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

\Rightarrow نبين على صحة الاستلزام العكسي :

لدينا الشرطين و نبين على صحة $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$.

- ومنه حسب الشرط الأول : $(F, +)$ مستقرة .

- حسب الشرط الثاني : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in F : \alpha x \in F$ نأخذ $\alpha = -1$ نحصل $\alpha x = -1x = -x \in F$ فإن $-x \in F$

إذن : $(F, +)$ زمرة جزئية ل $(E, +)$.

- ليكن (x, y) من F^2 و (α, β) من \mathbb{R}^2 .

لدينا (x, y) من E^2 (لأن $E \subset F$) ونعلم أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي إذن يحقق الموضوعات الفضاء الأربع ومنه

نحصل على صحة الموضوعات الفضاء الأربع تتحقق لكل (x, y) من F^2 .

وبالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصية المميزة 1:

4. الخاصية المميزة 2 :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير منعدم من E ($F \neq \emptyset$ و $E \subset F$).

$(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$ إذا و فقط إذا كان :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 , \forall (x, y) \in F^2 : \alpha x + \beta y \in F$

5. برهان :

يكفي أن نبين تكافؤ الخاصيتين المميزتين 1 و 2 .

\Rightarrow نبين على صحة الاستلزام المباشر :

لدينا $\forall (x, y) \in F^2 : x + y \in F$ (الشرط 1) و $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in F : \alpha x \in F$ (الشرط 2)

ونبين أن $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 , \forall (x, y) \in F^2 : \alpha x + \beta y \in F$:

ليكن x و y من F و α و β من \mathbb{R} إذن αx و βy من F حسب الشرط 2 .

ومنه $\alpha x + \beta y$ من F حسب الشرط 1

و بالتالي : $\alpha x + \beta y \in F$

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

\Rightarrow نبين على صحة الاستلزام العكسي :

لدينا : $\alpha x + \beta y \in F : \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in F^2$ و نبين على صحة الشرطين .

ليكن x و y من F و α و β من \mathbb{R} حيث $\alpha x + \beta y \in F$

نأخذ : $\alpha = \beta = 1 : x + y \in F \forall (x, y) \in F^2$

إذن الشرط 1 تحقق.

ليكن x و y من F و α و β من \mathbb{R} حيث $\alpha x + \beta y \in F$

نأخذ : $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ نحصل على $\alpha x \in F \forall (x, y) \in F^2$

إذن الشرط 2 تحقق.

وبالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصيتان المميزة 1 و 2 متكافئتين:

6. مثال :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي حيث $E \neq \{\vec{0}\}$ و \vec{a} عنصر من E مع $\vec{a} \neq \vec{0}$ لنعتبر الجزء D_a من E المعروف ب :

$$D_a = \{ \vec{x} \in E / \exists k \in \mathbb{R}; \vec{x} = k\vec{a} \}$$

نبين أن : $(D_a, +, \cdot)$ فضاء حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$.

لهذا نستعمل الخاصية المميزة 2 :

ليكن \vec{x} و \vec{y} من D_a إذن يوجد k و k' من \mathbb{R} حيث $\vec{x} = k\vec{a}$ و $\vec{y} = k'\vec{a}$

ليكن α و β من \mathbb{R} نتحقق هل $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in D_a$ ؟

لدينا : $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha(k\vec{a}) + \beta(k'\vec{a})$

(حسب إحدى موضوعات الفضاء)

$$= (\alpha k)\vec{a} + (\beta k')\vec{a}$$

(حسب إحدى موضوعات الفضاء)

$$= (\alpha k + \beta k')\vec{a}$$

($k'' = \alpha k + \beta k' \in \mathbb{R}$)

$$= k''\vec{a} \in D_a$$

ومنه : $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in D_a$

خلاصة : $(D_a, +, \cdot)$ فضاء حقيقي جزئي ل $(E, +, \cdot)$. المجموعة D_a تسمى المستقيم المتجهي المولد ب \vec{a} .

V. الأسرة – التاليفات الخطية Les familles - Les combinaisons linéaires

1. أسرة منتهية من المتجهات :

❖ تعريف :

ليكن $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ عدد منتهي من متجهات فضاء متجهي حقيقي $(E, +, \cdot)$. $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ يسمى أسرة منتهية من المتجهات E و نرمز لها ب : $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ (n -uplets)

❖ أمثلة :

مثال 1 :



في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ نعتبر المتجهات (أي الأزواج) : $\vec{e}_1 = (1, 2)$ و $\vec{e}_2 = (5, 9)$ و $\vec{e}_3 = (6, 7)$ و $\vec{e}_4 = (0, 1)$

لدينا : $\mathcal{F}_1 = (\vec{e}_1)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_3 = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_4 = (\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_5 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

مثال 2 :

في الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ نعتبر المتجهات (أي المصفوفات) : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ و $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا : $\mathcal{F}_1 = (\vec{e}_1)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_3 = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_4 = (\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

. $\mathcal{F}_5 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2. تأليفة خطية منتهية :

تعريف :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

• نسمي تأليفة خطية للمتجهات $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$ و \vec{e}_n من E كل متجهة \vec{u} من E تحقق ما يلي :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \vec{e}_i = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n \text{ حيث } \alpha_n \text{ و } \dots \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$$

• الأعداد الحقيقية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ و α_n تسمى معاملات التأليفة الخطية .

3. أمثلة :

مثال 1 :

المتجهة $\vec{0}$ هي تأليفة خطية لكل أسرة منتهية من متجهات أي فضاء متجهي حقيقي $(E, +, \cdot)$.

مثال 2 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ نعتبر المتجهتين (أي الزوجين) : $\vec{e}_1 = (1, 2)$ و $\vec{e}_2 = (5, 9)$

لدينا المتجهة (أي الزوج) : $\vec{u} = (13, 24)$ تحقق ما يلي : $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \Leftrightarrow (13, 24) = 3(1, 2) + 2(5, 9)$

إذن : \vec{u} تأليفة خطية ل \vec{e}_1 و \vec{e}_2 .

مثال 3 :

في الفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ نعتبر المتجهتين (أي المصفوفتين) : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ و $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

لدينا المتجهة (أي المصفوفة) : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ تحقق ما يلي : $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

إذن : \vec{u} تأليفة خطية ل \vec{x} و \vec{y} .

❖ مثال 4 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ نعتبر المتجهتين (أي العددين العقديين) : $\vec{e}_1 = 1$ و $\vec{e}_2 = i$

لدينا المتجهة (أي العدد العقدي) : $\vec{u} = 5 - 3i$ تحقق ما يلي : $\vec{u} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \Leftrightarrow 5 - 3i = 5 \cdot 1 + (-3) \cdot i$

إذن : \vec{u} تأليفة خطية ل \vec{e}_1 و \vec{e}_2 .

❖ 4. أسرة \mathcal{F} تولد فضاء متجهي حقيقي :

❖ تعريف :

لتكن \vec{u} متجهة من E و أسرة من المتجهات $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$

• نقول إن الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ تولد المتجهة \vec{u} (*engendre \vec{u}*) إذا كانت \vec{u} تكتب على شكل تأليفة خطية للمتجهات $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ و $\vec{e}_n, \dots, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1$.

• نقول إن الأسرة \mathcal{F} تولد الفضاء E إذا كانت الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ تولد جميع متجهات الفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$ أي : $\forall \vec{u} \in E, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$.

❖ أمثلة :

❖ مثال 1 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ نعتبر الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ حيث : المتجهتين (أي الزوجين) : $\vec{e}_1 = (1, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, 1)$

لدينا : لكل متجهة \vec{x} من \mathbb{R}^2 (أي الزوج $\vec{x} = (a, b)$) تحقق ما يلي : $\vec{x} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \Leftrightarrow (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$

إذن : كل متجهة \vec{x} من E هي تأليفة خطية ل \vec{e}_1 و \vec{e}_2 .

• خلاصة : الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

❖ مثال 2 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ نعتبر الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ حيث : المتجهات (أي المتلوثات) : $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$

و $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

لدينا : لكل متجهة \vec{x} من \mathbb{R}^3 (أي المتلوث $\vec{x} = (a, b, c)$) تحقق ما يلي :

$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \Leftrightarrow \vec{x} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$

إذن : كل متجهة \vec{x} من E هي تأليفة خطية ل \vec{e}_1 و \vec{e}_2 و \vec{e}_3 .

• خلاصة : الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

❖ مثال 3 :

في الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ نعتبر المتجهات (أي المصفوفات): $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و

$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا لكل المتجهة $\vec{u} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (أي لكل مصفوفة): تحقق ما يلي:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4$$

إذن: كل متجهة (مصفوفة) \vec{u} من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي تاليفة خطية للمصفوفات \vec{e}_1 و \vec{e}_2 و \vec{e}_3 و \vec{e}_4 .

خلاصة: الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

مثال 4:

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ نعتبر المتجهتين (أي العددين العقديين): $\vec{e}_1 = 1$ و $\vec{e}_2 = i$

لدينا لكل متجهة \vec{x} من \mathbb{C} (أي لكل عدد عقدي): $\vec{u} = z = a + bi$ تحقق ما يلي: $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$

إذن: \vec{u} تاليفة خطية ل \vec{e}_1 و \vec{e}_2 .

خلاصة: الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

أسرة حرة منتهية - أسرة مقيدة منتهية: *Famille libre finie - Famille liée finie*.

تعريف: (أسرة حرة منتهية)

نقول إن أسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ من متجهات فضاء متجهي حقيقي $(E, +, \cdot)$ هي حرة (أو أيضا المتجهات $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$ و

\vec{e}_n مستقلة خطيا) إذا تحقق الاستلزام التالي:

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

ملحوظة:

$\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ أسرة حرة إذا كان:

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

أو أيضا: $\forall \alpha_i \in \mathbb{R} ; \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$ مع $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

أمثلة:

مثال 1:

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ نعتبر المتجهات (أي الأزواج): $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ و $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$

نبين أن المتجهات \vec{e}_1 و \vec{e}_2 و \vec{e}_3 تكون أسرة حرة.

ليكن $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ من \mathbb{R}^3 حيث $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$ (1) ونبين أن: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$(1) \Rightarrow \alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, 0, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0, 0) + (0, 0, \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \text{ و } \alpha_2 = 0 \text{ و } \alpha_3 = 0$$

ومنه : $\alpha_1 = 0$ و $\alpha_2 = 0$ و $\alpha_3 = 0$

خلاصة : المتجهات \vec{e}_1 و \vec{e}_2 و \vec{e}_3 تكون أسرة حرة . (أو أيضا الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أسرة حرة أو غير مقيدة) .

❖ تعاريف : (أسرة مقيدة منتهية)

إذا كانت أسرة منتهية $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ من فضاء متجهي حقيقي $(E, +, \cdot)$ غير حرة نقول إن الأسرة

$\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ مقيدة منتهية (ونقول أيضا المتجهات $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ مرتبطة خطيا) .

❖ ملحوظة :

$\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ أسرة حرة إذا كان :

$\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ مقيدة إذا كان توجد أعداد حقيقية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ليست كلها منعدمة حيث

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

أو أيضا : $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, 0, \dots, 0)$ و $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$ $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

❖ مثال :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ نعتبر المتجهات (أي الأزواج) : $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ و $\vec{e}_3 = (2, 1, 0, 0)$ نبين أن المتجهات \vec{e}_1 و \vec{e}_2 و \vec{e}_3 ليست مستقلة خطيا .

ليكن $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ من \mathbb{R}^3 حيث $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$ (1) ونبين على الأقل أحد الأعداد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ غير منعدم .

$$(1) \Rightarrow \alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(2,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, 0, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0, 0) + (2\alpha_3, \alpha_3, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \text{ و } \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3 \text{ و } \alpha_2 = -\alpha_3$$

يكفي أن نأخذ : ومنه : $\alpha_3 = 1$ إذن و $\alpha_2 = -1$ و $\alpha_1 = -2$.

خلاصة : المتجهات \vec{e}_1 و \vec{e}_2 و \vec{e}_3 غير مستقلة خطيا أو أيضا تكون أسرة ليست بحرة . (أو أيضا $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أسرة حرة)

❖ 6. خاصيات :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي . حيث العنصر المحايد للزمرة $(E, +)$ هو المتجهة $\vec{0}$.

- كل أسرة تحتوي على المتجهة $\vec{0}$ فهي مقيدة . (أي أسرة حرة لا تحتوي على المتجهة $\vec{0}$) .
- كل أسرة تتكرر فيها متجهة فهي مقيدة . (أي أسرة حرة عناصرها مختلفة مثنى مثنى) .
- أسرة مقيدة يكافئ إحدى المتجهات من الأسرة تكتب بتأليفة خطية للمتجهات المتبقية (أي بدلالة المتجهات المتبقية) .

نقول إن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي بعده منتهي إذا وجدت أسرة منتهية تولد الفضاء المتجهي الحقيقي E .

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ أسرة منتهية مكونة من عناصر فضاء متجهي حقيقي $(E, +, \cdot)$.

- نقول إن الأسرة \mathcal{B} هي أساس منتهي للفضاء المتجهي الحقيقي E إذا كانت كل متجهة \vec{x} من E تكتب بطريقة وحيدة على شكل تآليفة خطية لعناصر \mathcal{B} (أو أيضا : $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + \dots + x_n\vec{e}_n$ / $\exists!(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ / $\forall \vec{x} \in E$).
- في هذه الحالة : نقول أن الفضاء E منسوب إلى الأساس \mathcal{B} أو أيضا الفضاء E مزود بأساس \mathcal{B} .

• (x_1, x_2, \dots, x_n) يسمى إحداثيات المتجهة \vec{x} في الأساس \mathcal{B} و نكتب $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ أو أيضا $\vec{x} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- أما n عدد متجهات المكونة للأساس \mathcal{B} يسمى بعد الفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$ و نرمز لذلك ب: $\dim E = n$. أما الفضاء E نرمز له ب E_n

• $\vec{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ و $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ متجهتين من الفضاء المتجهي الحقيقي E منسوب إلى أساس $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

• المتجهة $\alpha\vec{x}$ إحداثياتها هي $(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ أو أيضا : $\alpha\vec{x} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$

• المتجهة $\vec{x} + \vec{y}$ إحداثياتها هي $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ أو أيضا : $(\vec{x} + \vec{y}) \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

\Rightarrow نبين على صحة الاستلزام المباشر :

لدينا :

- $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ أسرة ل $(E, +, \cdot)$ إذن كل متجهة \vec{x} من E تكتب بطريقة وحيدة على شكل تآليفة خطية لعناصر \mathcal{B} إذن \mathcal{B} أسرة مولدة للفضاء E .

- نبين أن \mathcal{B} أسرة حرة : ليكن $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ من \mathbb{R}^n حيث $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$ (1) ونعلم أن :

$\alpha_n = 0$ و... و $\alpha_2 = 0$ و $\alpha_1 = 0$ إذن (لأن \mathcal{B} أساس) وحيدة هي طريقة الكتابة $0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + \dots + 0\vec{e}_n = \vec{0}$ وبما أن طريقة الكتابة هي وحيدة (لأن \mathcal{B} أساس) $\alpha_n = 0$ و... و $\alpha_2 = 0$ و $\alpha_1 = 0$ ومنه : أسرة حرة .

وبالتالي الاستنزام المباشر صحيح .

← نبين على صحة الاستنزام العكسي :

لدينا : أسرة حرة و مولدة .

• بما أن أسرة مولدة إذن لكل متجهة \vec{x} من E تكتب على شكل تاليفة خطية لعناصر \mathcal{B} إذن يوجد $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ من \mathbb{R}^n حيث $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n$.
نبين أن هذه الكتابة وحيدة .

نفترض أن \vec{x} له كتابة ثانية لتكن هي $\vec{x} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \dots + \beta_n\vec{e}_n$ مع $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. ومنه :

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x}$$

$$= (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n) - (\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \dots + \beta_n\vec{e}_n)$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e}_n$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e}_n = \vec{0}$$

إذن : $(\alpha_1 - \beta_1) = 0$ و $(\alpha_2 - \beta_2) = 0$ و... و $(\alpha_n - \beta_n) = 0$ (لأن أسرة حرة)

ومنه : $\alpha_1 = \beta_1$ و $\alpha_2 = \beta_2$ و... و $\alpha_n = \beta_n$

إذن : كل متجهة \vec{x} من E تكتب بطريقة وحيدة على شكل تاليفة خطية لعناصر \mathcal{B} .
ومنه : أسرة حرة .

وبالتالي الاستنزام العكسي صحيح . $\vec{e}_1 = 1$ و $\vec{e}_2 = i$ و $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

وهذا يثبت صحة الخاصية .

5. خاصية : (تقبل)

6. أمثلة :

• $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $\dim E = n$.
كل أساس \mathcal{B} للفضاء E يحتوي بالضبط على n متجهة .

• مثال 1 : $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $\dim \mathbb{R} = 1$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B} = (\vec{e}_1)$ مع $\vec{e}_1 = 1$.

• مثال 2 : $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ مع $\vec{e}_1 = (1, 0)$ و

$\vec{e}_2 = (0, 1)$. (أو $\vec{e}_1 = (1, 0)$ و $\vec{e}_2 = (2, 1)$.)

• مثال 3 : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ مع $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ و

$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ و $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. (أو $\vec{e}_1 = (-1, 0, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, -1, 0)$ و $\vec{e}_3 = (0, 0, -1)$.)

• مثال 4 : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $\dim \mathbb{C} = 2$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (1, i)$ مع $\vec{e}_1 = 1$ و $\vec{e}_2 = i$

• مثال 5 : $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ مع

$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 6 : $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ليس له أساس .

VII. محددة أسرة متكونة من n متجهة من فضاء متجهي E بعده n

Déterminant d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n

1. حالة $n = 2$ نأخذ الأساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ بدل من $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ و الفضاء $(E, +, \cdot)$ نرسم له ب $(E_2, +, \cdot)$

❖ تعريف :

$\vec{u}(x_1, x_2)$ و $\vec{v}(y_1, y_2)$ متجهتين من فضاء متجهي حقيقي $(E_2, +, \cdot)$ منسوب إلى أساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

العدد الحقيقي : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1$ يسمى محددة الأسرة $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$

أو أيضا : يسمى محددة المتجهتين \vec{u} ثم \vec{v} (الترتيب مهم) بالنسبة للأساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$

نرمز لذلك ب : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1$

❖ تقنية :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} \\ \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 \\ \times & \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1$$

❖ خاصية :

- $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \neq 0$ أسرة حرة يكافئ $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$ أسرة مقيدة يكافئ (هي تمثل نفس الخاصية الأولى)

❖ برهان :

نضع $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ و $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

\Rightarrow نبين على صحة الاستلزام المباشر :

نفترض أن أسرة مقيدة إذن يوجد $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ من \mathbb{R}^2 حيث $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$

نأخذ $\alpha_1 \neq 0$ ومنه : $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{e}_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_2$

إذن $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix}$ و $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ مستقيمتين ومنه : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} \lambda c & c \\ \lambda d & d \end{vmatrix} = \lambda cd - \lambda dc = 0$

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

\Leftarrow نبين على صحة الاستلزام العكسي :

لدينا : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0$ أي $ad = bc$ (1) ونبين أن أسرة مقيدة .

نفترض أن أسرة حرة ومنه الأسرة لا تحتوي على المتجهة المنعدمة إذن $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ و $\vec{e}_2 \neq \vec{0}$ ومنه $(a, b) \neq (0, 0)$ و $(c, d) \neq (0, 0)$

نفترض أن $a \neq 0$ حسب (1) نحصل على $d = \frac{bc}{a}$ ومنه $\vec{ce}_1 \begin{pmatrix} ca \\ ca \end{pmatrix}$ و $\vec{ae}_2 \begin{pmatrix} ac \\ ad \end{pmatrix} = \vec{ae}_2 \begin{pmatrix} ac \\ a \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = \vec{ae}_2 \begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix}$

إذن : $\vec{ae}_2 = \vec{ce}_1$ ومنه : $\vec{ae}_2 - \vec{ce}_1 = \vec{0}$ مع $(a, c) \neq (0, 0)$ (لأن $a \neq 0$) وبالتالي أسرة مقيدة .

إذن : ما افترضناه كان خاطئا .

خلاصة : أسرة مقيدة .

وبالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

❖ خاصية :

• $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ أساس ل E_2 يكافئ \mathcal{B}_1 أسرة حرة

❖ برهان :

⇒ نبين على صحة الاستلزام المباشر :

بما أن $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ أساس ل E_2 إذن هي أسرة حرة .

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

← نبين على صحة الاستلزام العكسي :

نفترض أن $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ أسرة حرة ثم نبين أن $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ أسرة مولدة ل E_2 .

ليكن $\vec{u} = \alpha \vec{e}_2 + \beta \vec{e}_1 \in E_2$ مع $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$..

لدينا : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ (لأن $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ أسرة حرة) .

و بالتالي النظمة : التالية تقبل حل في \mathbb{R}^2 : $\begin{cases} ax + cy = \alpha \\ bx + dy = \beta \end{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2$

حسب :

$$(1) \Leftrightarrow \vec{u} = (ax + cy)\vec{i} + (bx + dy)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = x(a\vec{i} + b\vec{j}) + y(c\vec{i} + d\vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

ومنه : $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ أسرة مولدة ل E_2 .

❖ مثال: نضع : $\vec{e}_1 = (1, 0)$ و $\vec{e}_2 = (2, 1)$ هل $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ أساس ل $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

لدينا : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 \neq 0$ ومنه : $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ أساس ل $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

2. حالة $n = 3$ نأخذ الأساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بدل من $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ و الفضاء $(E, +, \cdot)$ نرسم له ب $(E_3, +, \cdot)$

تعريف :

$\vec{u}(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ و $\vec{v}(a_{12}, a_{22}, a_{32})$ و $\vec{w}(a_{13}, a_{23}, a_{33})$ متجهات من فضاء متجهي حقيقي $(E_3, +, \cdot)$ منسوب إلى أساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

العدد الحقيقي : $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ يسمى محددة الأسرة $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

بالنسبة للأساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

أو أيضا : يسمى محددة المتجهتين \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} (الترتيب مهم) بالنسبة للأساس $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نرمز لذلك ب : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

تقنية :

$$\begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{array}$$

خاصية :

- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ أسرة حرة يكافئ $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ أسرة مقيدة يكافئ $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (هي تمثل نفس الخاصية الأولى)

خاصية :

- $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ أساس ل E_2 يكافئ أسرة حرة

مثال: نضع : $\vec{e}_1 = (1, 0, 3)$ و $\vec{e}_2 = (2, 1, 0)$ و $\vec{e}_3 = (5, 0, -1)$ هل $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أساس ل $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

لدينا : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 0 - 15 = -16$ ومنه : $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

أساس ل $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$